PARTIE A : Charge du condensateur équivalent

A.1. D'après la loi d'additivité des tensions (ou loi des mailles) : $E = u_{R_1} + u_{C,eq}$.

A.2. D'après la loi d'Ohm : $u_{R_1} = R_1 \times i$

De plus, $\left\{\begin{array}{l} i = \dfrac{dq}{dt} \\ q = C_{eq} \times u_{C,eq} \end{array}\right\} \Rightarrow i = \dfrac{d(C_{eq} \times u_{C,eq})}{dt} = C_{eq} \times \dfrac{du_{C,eq}}{dt}$ car C_{eq} constante.

Donc $E = R_1 \times C_{eq} \times \dfrac{du_{C,eq}}{dt} + u_{C,eq}$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{du_{C,eq}}{dt} + \dfrac{1}{R_1 \times C_{eq}} \times u_{C,eq} = \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}}$ (équation différentielle du 1^er^ ordre).

A.3. Méthode 1 : <u>résolution de l'équation différentielle</u>

On écrit l'équation différentielle sous la forme *y'* = *a.y* + *b* qui admet des solutions de la forme $y = K.e^{a.x} - \dfrac{b}{a}$: $\dfrac{du_{C,eq}}{dt} = -\dfrac{1}{R_1 \times C_{eq}} \times u_{C,eq} + \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}$

Par analogie, $a = -\dfrac{1}{R_1 \times C_{eq}}$ et $b = \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}$ donc $-\dfrac{b}{a} = -\left(\dfrac{\dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}}{-\dfrac{1}{R_1 \times C_{eq}}}\right) = E$

ainsi les solutions sont de la forme $u_{C,eq}(t) = K.e^{-\frac{t}{R_1 \times C_{eq}}} + E$

En tenant compte des conditions initiales : $u_{C,eq}(0) = 0 = K.e^0 + E$ donc $K = -E$

Finalement on trouve la solution : $u_{C,eq}(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 \times C_{eq}}}\right)$.

Par analogie avec $u_{C,eq}(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}}\right)$, on en déduit que $\tau_{\text{charge}} = R_1 \times C_{eq}$.

Méthode 2 : <u>On part de la solution proposée et on la remplace dans l'équation différentielle</u>

$\dfrac{du_{C,eq}}{dt} + \dfrac{1}{R_1 \times C_{eq}} \times u_{C,eq} = \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}$ avec $u_{C,eq}(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}}\right)$

Donc $\dfrac{d\left(E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}}\right)\right)}{dt} + \dfrac{1}{R_1 \times C_{eq}} \times E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}}\right) = \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}$

$\Leftrightarrow E \times \left(0 - \left(-\dfrac{1}{\tau_{\text{charge}}}\right) \times e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}}\right) + \cancel{\dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}} - \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}} \times e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}} = \cancel{\dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{E}{\tau_{\text{charge}}} \times e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}} - \dfrac{E}{R_1 \times C_{eq}} \times e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}} = 0$

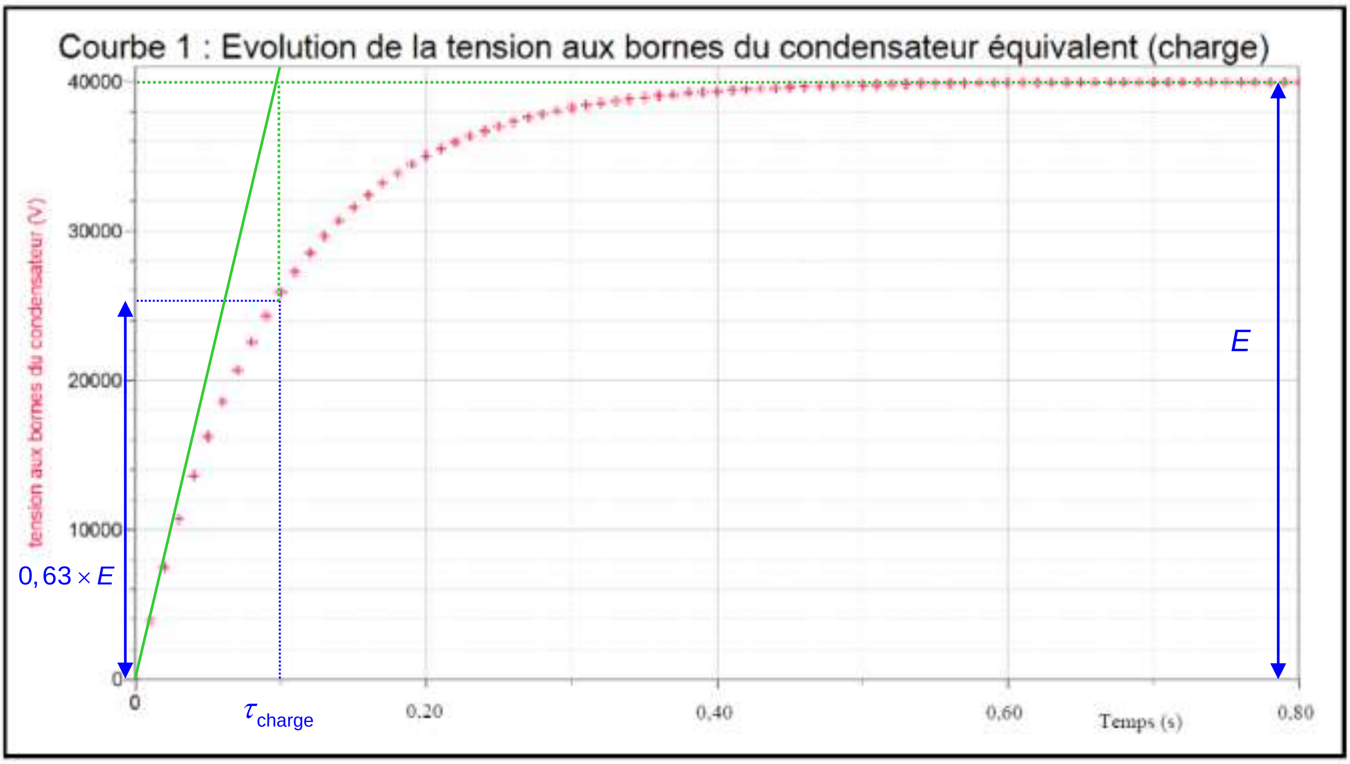
$$\Leftrightarrow E \times e^{-\frac{t}{\tau_{\text{charge}}}} \times \left(\frac{1}{\tau_{\text{charge}}} - \frac{1}{R_1 \times C_{eq}} \right) = 0$$ quel que soit t alors $\left(\frac{1}{\tau_{\text{charge}}} - \frac{1}{R_1 \times C_{eq}} \right) = 0$ donc $\tau_{\text{charge}} = R_1 \times C_{eq}$

A.4. **Méthode 1** (en bleu) **:** lors de la charge d'un circuit RC, la tension $u_{C,eq}$ atteint 63% de sa valeur finale pour $t = \tau_{\text{charge}}$.

Méthode 2 (en vert) **:** la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour $t = \tau_{\text{charge}}$.

Graphiquement, on trouve $\tau_{\text{charge}} = 0{,}10$ s

Or $\tau_{\text{charge}} = R_1 \times C_{eq} \Leftrightarrow C_{eq} = \dfrac{\tau_{\text{charge}}}{R_1}$ donc $C_{eq} = \dfrac{0{,}10}{160 \times 10^3} = 6{,}25 \times 10^{-7}$ F $= 625$ nF.



A.5. Chaque condensateur ayant une capacité de 200 nF, on en déduit que 3 condensateurs ont été utilisés lors de l'expérimentation.
Remarque : l'écart entre 625 nF et 600 nF s'explique par la précision de la détermination graphique : en effet, pour $C_{eq} = 600$ nF,

$\tau_{\text{charge}} = R_1 \times C_{eq} = 160 \times 10^3 \times 600 \times 10^{-9} = 0{,}096 \text{ s} \approx 0{,}10$ s

A.6. D'après l'énoncé, $W = \dfrac{1}{2} \times C_{eq} \times u_{C,eq}^2$

Ainsi, $W_{\max} = \dfrac{1}{2} \times 600 \times 10^{-9} \times (40 \times 10^3)^2 = 480$ J (en prenant la valeur « réelle » de C_{eq})

PARTIE B : Décharge du condensateur équivalent

B.1. D'après l'énoncé : $u_{C,eq}(t)=E\times e^{-\frac{t}{R_2\times C_{eq}}}$ donc $u_{C,eq}(t=\Delta t)=E\times e^{-\frac{\Delta t}{R_2\times C_{eq}}}$

Soit $u_{C,eq}(t=\Delta t)=40\times 10^3\times e^{-\frac{12\times 10^{-6}}{100\times 600\times 10^{-9}}}=3{,}3\times 10^4\ \text{V}$ = 33 kV.

B.2. D'après l'énoncé, $W=\dfrac{1}{2}\times C_{eq}\times u_{C,eq}^2$ donc $W_{arc}=\dfrac{1}{2}\times C_{eq}\times u_{C,eq}^2(t=\Delta t)$

Soit $W_{arc}=\dfrac{1}{2}\times 600\times 10^{-9}\times (3{,}3\times 10^4)^2=322\ \text{J}$ (calcul fait avec la valeur non arrondie de $u_{C,eq}$).

B.3. D'après l'énoncé : $\eta=\dfrac{E_{utile}}{E_{consommée}}$ soit ici $\eta=\dfrac{W_{arc}}{W_{\max}}$.

Donc $\eta=\dfrac{322}{480}=0{,}67=67\ \%$ ce qui est relativement correct, bien qu'on puisse regretter que 33% de l'énergie fournie ne soit pas utile.