

Activité n°2 : Modélisation graphique d'un réseau et optimisation

La distribution d'énergie électrique le long d'un réseau nécessite d'optimiser son acheminement afin de minimiser les pertes par effet Joule. La théorie des graphes permet de représenter une structure complexe et ses connexions afin de résoudre ce type de problème.

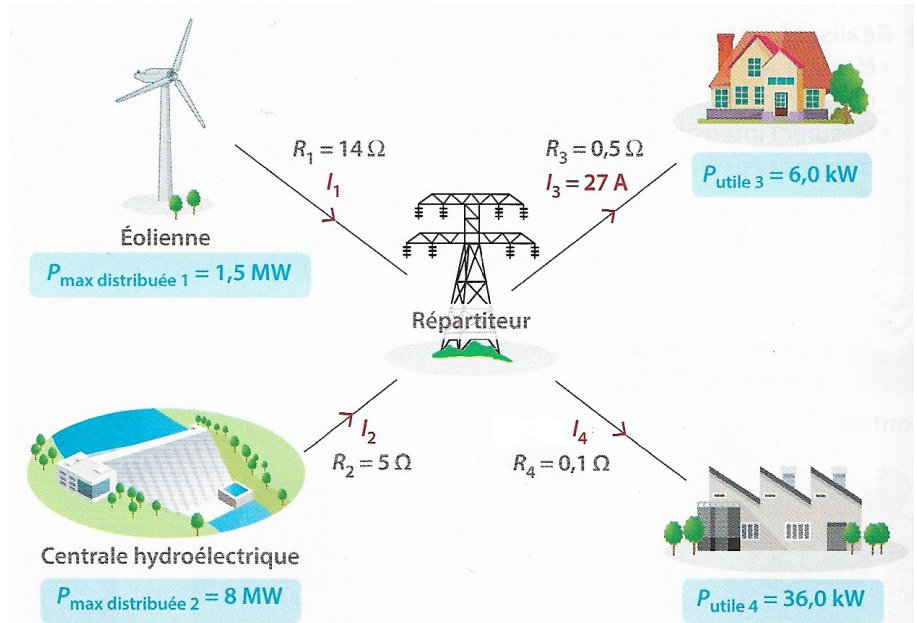


Objectif : Modéliser un réseau électrique et minimiser les pertes par effet Joule.

Doc.1. Modélisation d'un réseau de distribution électrique simple

Pour étudier l'optimisation du fonctionnement du réseau électrique, il peut être simplifié, comme dans l'exemple ci-contre.

- Une éolienne et une centrale hydroélectrique alimentent le réseau avec des puissances électriques maximales différentes ($P_{\text{max distribuée}}$) et des intensités I_1 et I_2 ajustables.
- Deux usagers, aux besoins différents (P_{utile}), reçoivent des intensités différentes I_3 et I_4 connues et fixées.
- La distribution se fait par quatre câbles de résistances différentes connues (R_1, R_2, R_3 et R_4) parcourus respectivement par des intensités I_1, I_2, I_3 et I_4 .
- Un répartiteur permet d'ajuster productions et besoins en tenant compte des pertes par effet Joule le long des différents câbles.



Les puissances distribuées par les centrales varient selon la technologie utilisée (nucléaire, thermique, solaire, etc.). Elles dépendent aussi du niveau de fonctionnement des centrales.

Les puissances utiles dépendent de l'abonnement souscrit par l'utilisateur. Ces puissances sont souvent exprimées en kVA (kilovoltampère) : 1kVA = 1 kW.

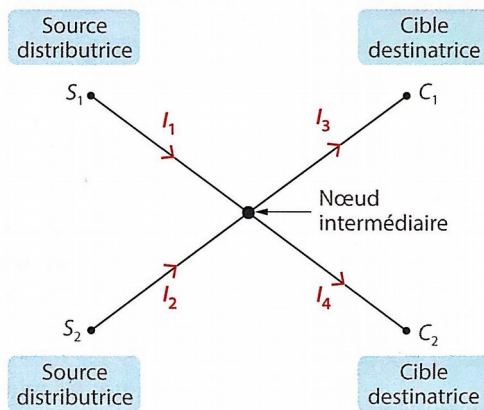
Doc.2. Modélisation d'un réseau de distribution électrique simple par un graphe orienté

Un graphe orienté permet de modéliser mathématiquement un réseau électrique simplifié.

Le réseau du document 1 est modélisé par un ensemble de points :

- deux sources distributrices S_1 et S_2 ;
- deux cibles destinatrices C_1 et C_2 ;
- un nœud intermédiaire.

Ces points sont reliés par des segments orientés appelés arcs.



Modélisation d'un réseau de distribution électrique par un graphe orienté.

Doc.3. Les trois contraintes du réseau modélisé

a. Contrainte sur les intensités sortant des sources

L'intensité délivrée par chaque source distributrice dépend de la puissance qu'elle distribue, les pertes par effet Joule étant limitées à environ 6 %.

Pour l'arc 1 : $P_{J1} \leq \frac{6}{100} \times P_{\text{max distribuée 1}}$

$$P_{J1} \leq \frac{6}{100} \times 1\,500\,000$$

soit $P_{J1} \leq 90\,000$ W.

Comme $P_{J1} = R_1 \times I_1^2$, avec $R_1 = 14 \, \Omega$, on a :

$$I_1 \leq \sqrt{\frac{P_{J1}}{R_1}}, \text{ or } \sqrt{\frac{90\,000}{14}} \approx 80 \text{ A}$$

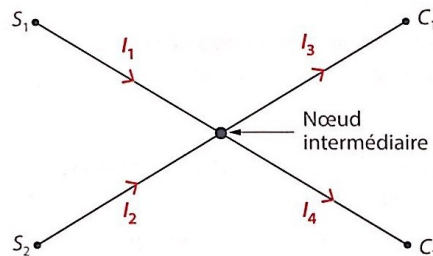
$$I_1 \leq 80 \text{ A}$$

De même, pour l'arc 2 : $I_2 \leq 310$ A.

b. Contrainte sur les intensités au nœud intermédiaire : loi des nœuds

L'intensité du courant se conserve : la somme des intensités entrant dans un nœud est égale à la somme des intensités qui en ressortent.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$



c. Contrainte sur les intensités arrivant aux cibles

L'intensité du courant qui alimente chaque cible destinataire est imposée par la puissance qui y est utilisée. Les pertes par effet Joule sur cette partie du réseau correspondent à environ 6 % de la puissance utilisée.

Pour l'arc 3 : $P_{J3} = \frac{6}{100} \times P_{\text{utile 3}}$

$$P_{J3} = \frac{6}{100} \times 6\,000 = 360 \text{ W}$$

Comme $P_{J3} = R_3 \times I_3^2$, avec $R_3 = 0,5 \, \Omega$, on a :

$$I_3 = \sqrt{\frac{P_{J3}}{R_3}} = \sqrt{\frac{360}{0,5}} \approx 27 \text{ A.}$$

Doc.4. Minimisation des pertes par effet Joule

Optimiser l'acheminement de l'énergie électrique revient à minimiser les pertes par effet Joule.

Pour cela, on définit et étudie une fonction objectif :

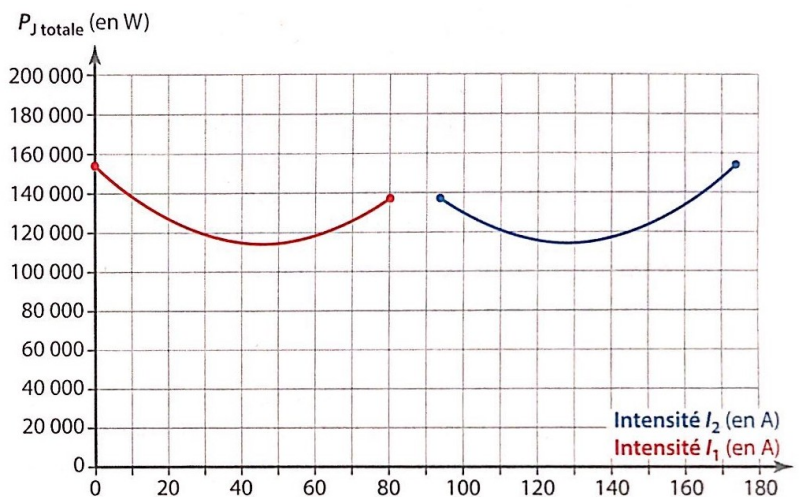
$$P_{J \text{ totale}} = P_{J1} + P_{J2} + P_{J3} + P_{J4}$$

Les intensités I_3 et I_4 étant constantes, $P_{J \text{ totale}}$ s'exprime en fonction des variables I_1 et I_2 .

L'étude des variations graphiques ou algébriques de $P_{J \text{ totale}}$ permet de déterminer les valeurs de I_1 et de I_2 qui minimisent les pertes.

FOCUS MATHS p. 156

Représentations graphiques de $P_{J \text{ totale}}$ en fonction de I_1 et de I_2 .



Questions :

- 1) Recopier la relation mathématique qui relie I_1 , I_2 , I_3 et I_4 ? Nommer la loi appliquée.
- 2) A l'aide du doc.3.c. en appliquant le même principe de calcul que pour I_3 , donner la valeur de I_4 . (Arrondir à l'unité)
- 3) Dans la relation obtenue à la question 1), remplacer les valeurs connues et calculer $I_1 + I_2$.
- 4) Exprimer $P_{J \text{ totale}}$ en fonction de I_1 , I_2 , I_3 et I_4 . (doc.4.)
- 5) En déduire que : $P_{J \text{ totale}} = 14 \times I_1^2 + 5 \times (174 - I_1)^2 + 2525$
ou $P_{J \text{ totale}} = 14 \times (174 - I_2)^2 + 5 \times I_2^2 + 2525$
- 6) Par lecture graphique déterminer la valeur minimale de $P_{J \text{ totale}}$ ainsi que les valeurs des intensités I_1 et I_2 correspondantes. Dans quel but avez-vous déterminé I_1 et I_2 ?