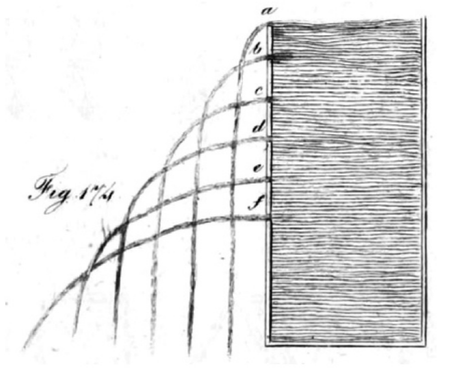
FORMATION DISCIPLINAIRE MECANIQUE DES FLUIDES
STATIQUE DES FLUIDES ET ESPRIT CRITIQUE

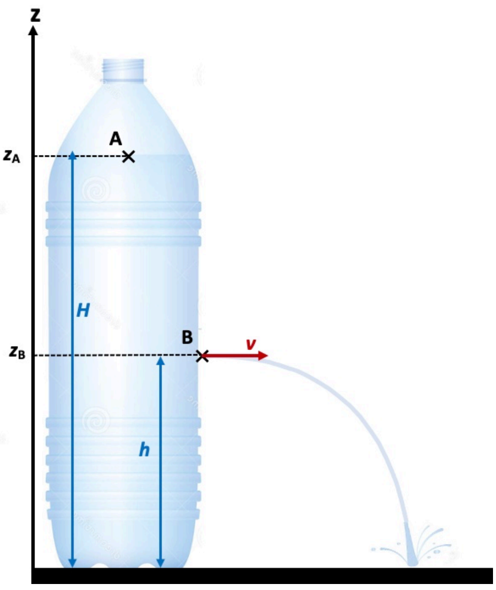
On trouve dans des ouvrages scientifiques récents et dans une illustration de Léonard de Vinci de 1828, l'affirmation suivante :
« La portée d'un jet issu d'une bouteille percée augmente avec la profondeur du trou »

Porter un regard critique sur cette affirmation.
Utiliser les lois de la Physique pour modéliser cette situation et vérifier sa véracité.

Étape 1 : Détermination de la vitesse d'écoulement d'un liquide en un trou de la bouteille percée

- En régime permanent, la relation de Bernoulli appliquée entre A et B, le long d'une ligne de courant du liquide supposé incompressible s'écrit :
  $\frac{1}{2}\rho \times v_{\mathrm{A}}^2 + \rho \times g \times z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho \times v_{\mathrm{B}}^2 + \rho \times g \times z_B + P_B$
- En A, la valeur de la vitesse d'écoulement du liquide est négligeable par rapport à sa valeur en B : $v_A = 0$
- Les positions A et B sont en contact avec l'air extérieur : $P_A = P_B = P_{atm}$
- La relation de Bernoulli devient :
  $\rho \times g \times z_A = \frac{1}{2}\rho \times v_{\mathrm{B}}^2 + \rho \times g \times z_B$
- On en déduit l'expression de la vitesse d'écoulement du liquide en B : $v_B = \sqrt{2g \times (H - h)}$



Conclusion : Plus la profondeur $(H - h)$ du trou augmente, plus la vitesse d'écoulement du liquide est importante.
Pour *H* fixée, la vitesse d'écoulement du liquide est d'autant plus importante que la hauteur *h* du trou est plus petite.

Étape 2 : Détermination de la portée du jet du liquide pour une vitesse initiale d'écoulement donnée.

- On étudie une particule de liquide, assimilée à un corps ponctuel G, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- On admet que la particule n'est soumise qu'à l'action de son poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$. On néglige toutes les autres forces devant le poids.

- Deuxième loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m \times \vec{a}$ soit $\vec{P} = m \times \vec{a}$ et donc $m \times \vec{g} = m \times \vec{a}$. Le vecteur accélération de la particule de liquide est égal au champ de pesanteur terrestre : $\vec{a} = \vec{g}$
Dans le repère cartésien (O ; *x* , *y*), le vecteur accélération a donc pour coordonnées : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$.

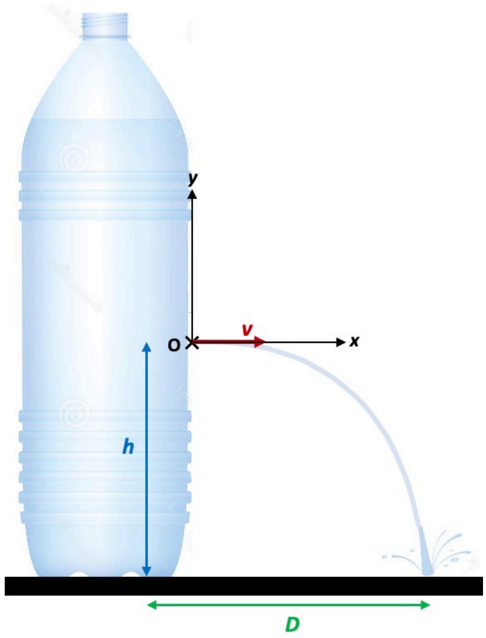
- Conditions initiales en O :
$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\vec{v}_0\begin{cases} v_{x_0} = v_0 \\ v_{y_0} = 0 \end{cases}$

- Le vecteur vitesse de la particule est la primitive du vecteur accélération par rapport au temps :
$\vec{v}\begin{cases} v_x = k_x \\ v_y = -g \times t + k_y \end{cases}$
En tenant compte des conditions initiales sur la vitesse, il vient :
$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -g \times t \end{cases}$

- Le vecteur position de la particule est la primitive du vecteur vitesse par rapport au temps :
$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 \times t + k'_x \\ y = -\frac{1}{2} g \times t^2 + k'_y \end{cases}$
En tenant compte des conditions initiales sur la position, il vient :
$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 \times t \\ y = -\dfrac{1}{2} g \times t^2 \end{cases}$

- Équation de la trajectoire : $t = \frac{x}{v_0}$ et donc $y = -\frac{g}{2v_0^2} \times x^2$

- La particule entre en contact avec le sol en $y = -h$.
On a alors $-h = -\frac{g}{2v_0^2} \times D^2$ soit $D = \sqrt{\frac{2v_0^2 \times h}{g}}$



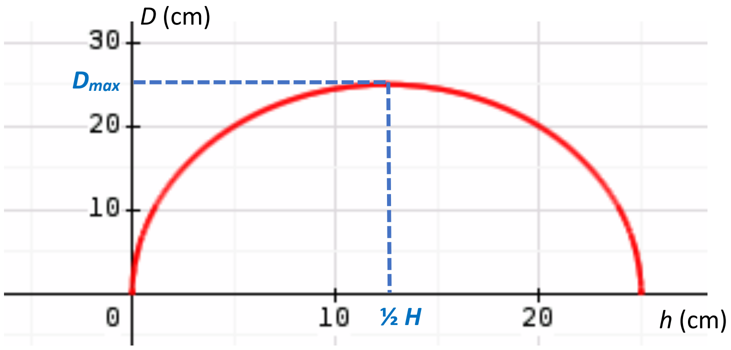
Conclusion : Pour une vitesse initiale d'écoulement du fluide donnée v_0, la portée du jet du liquide est d'autant plus importante que la hauteur *h* du trou est plus grande.

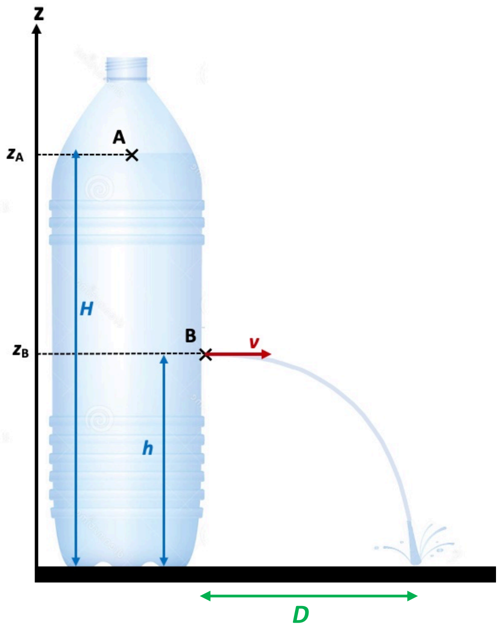
Étape 3 : Détermination de la portée du jet du liquide en fonction de la hauteur *h* du trou

- Pour une bouteille percée en B, les relations établies lors des étapes 1 et 2 conduisent à :
  - Vitesse d'écoulement du liquide en B : $v_B = \sqrt{2g \times (H - h)}$
  - Portée du jet du liquide : $D = \sqrt{\frac{2v_B^2 \times h}{g}}$

- La portée s'exprime en fonction de la hauteur *h* du trou par $D = \sqrt{\frac{2 \times 2g \times (H-h) \times h}{g}}$ ou $D = 2\sqrt{(H-h) \times h}$

- On trace le graphique de *D* en fonction de *h* pour *H* fixée et de valeur 25 cm :





Conclusion : La portée du jet est maximale quand le trou est à mi-hauteur du niveau du liquide dans la bouteille.

Remarque : La portée est identique pour deux trous symétriques par rapport à un trou situé à la mi-hauteur du niveau du liquide.