


Activité n°2 : Mesure d'une longueur par triangulation

En 1792, Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) et Pierre Méchain (1744-1804), astronomes et mathématiciens français, sont mandatés par l'Académie des sciences pour établir un système de mesures universel valable qui n'ait plus pour modèle l'Homme – on mesurait alors en pouce, en pieds, en coudées...- mais le patrimoine commun de l'humanité : la Terre.



Objectif : En retraçant les pas de Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain, grâce à la triangulation plane, déterminez la valeur de la distance Melun-Malvoisine.

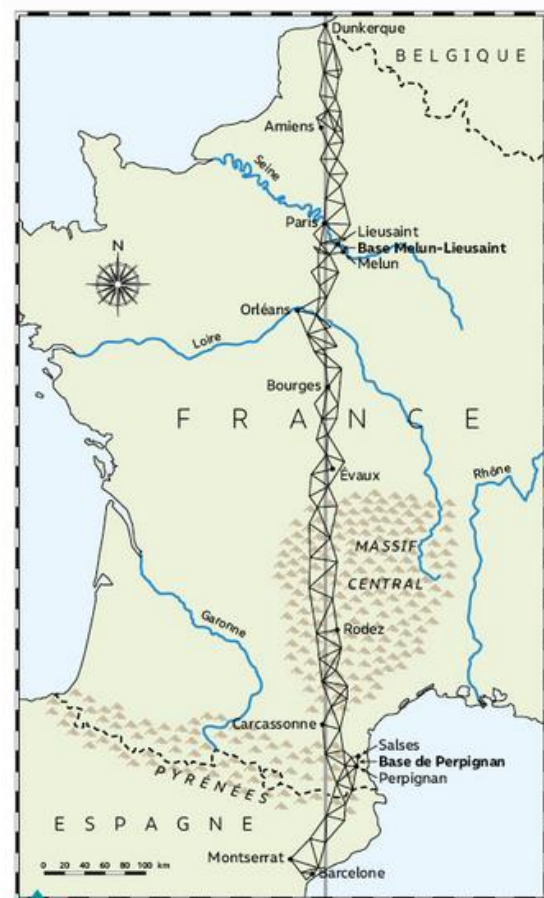


Jean-Baptiste Delambre, Pierre Méchain et leurs collaborateurs devaient définir la longueur du mètre, fixée selon les scientifiques de l'Académie des sciences à « la dix millionième partie du quart du méridien terrestre ». Ils se lancent pour cela dans la mesure du méridien de Paris: une ligne née dans l'imagination des cartographes, qui traverse la France de part en part (de Dunkerque à Barcelone) pour rejoindre les deux pôles du globe. Les deux tiers supérieurs, de Dunkerque à Rodez, incombent à Jean-Baptiste Delambre, et le parcours Rodez-Barcelone à Pierre Méchain. Aucun monument ne commémore les efforts déployés pour mener à bien cette mission, en pleine Terreur (au moment de la Révolution française)...

Les chercheurs utilisent une méthode mathématique appelée « triangulation ». Elle consiste à diviser le terrain en triangles pour le mesurer. On trace d'abord le long du méridien des triangles jointifs, ayant chacun un côté en commun avec le suivant. Il suffit ensuite de mesurer les angles des triangles par visée, depuis un endroit situé en hauteur (clocher, château, tour) et de disposer de la longueur d'une seule base (celle de Melun-Lieusaint pour la partie nord) pour pouvoir en déduire tous les côtés des triangles dont la somme était précisément la portion de méridien.

D'après Azar Khalatbari, « Le mètre et le méridien », www.liberation.fr, 2006.

Doc.1. L'aventure de Delambre et Méchain



Doc.2. Chaîne des triangles de Dunkerque à Barcelone

Doc.3. La base Melun-Lieusaint

Toise: unité de longueur ancienne, correspondant à six pieds :

1 toise = 1,949 m.

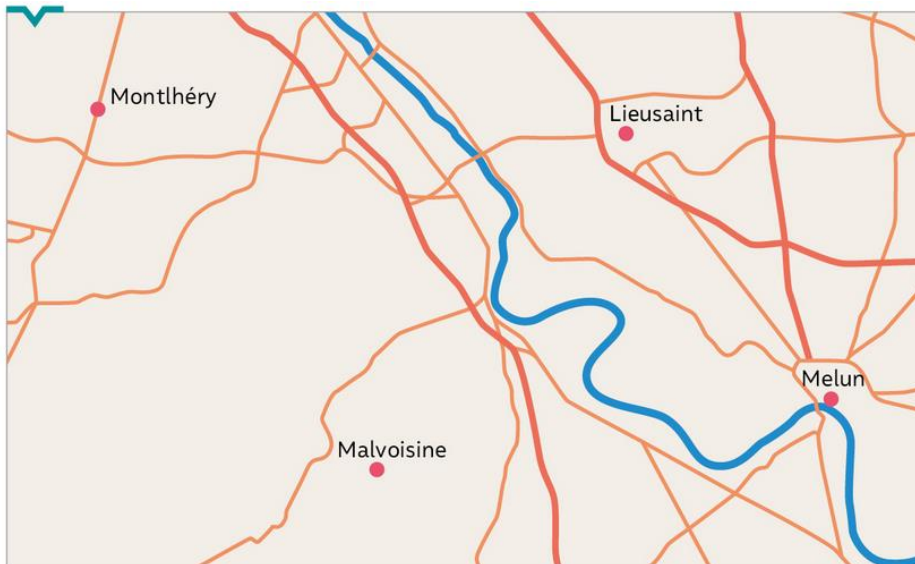
On peut effectuer une triangulation à partir de la connaissance de la longueur d'une première base de 6075,90 toises entre Melun et Lieusaint, deux villes situées en Seine-et-Marne (77). Ainsi, à partir des extrémités de cette base, Jean-Baptiste Delambre vise Malvoisine. De la mesure des angles, il déduit la distance Lieusaint-Malvoisine et celle-ci constitue la base d'un nouveau triangle dont le sommet sera Monthéry. Une chaîne de triangles successifs juxtaposés est ainsi formée le long de la méridienne. L'arc de méridien Dunkerque-Barcelone a pour longueur un quarantième de méridien terrestre.

D'après « Un voyage... de Dunkerque à Barcelone », www.clea-astro.eu.

Doc.4. Mesures effectuées par Delambre

Angle au sommet « Melun »	Angle au sommet « Lieusaint »	Angle au sommet « Malvoisine »
63,73°	75,66°	40,62°

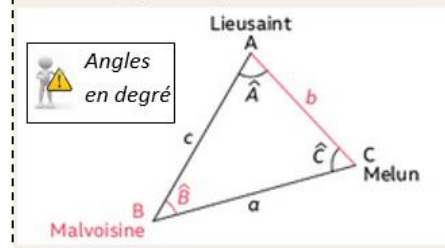
Doc.5. Les triangles Lieusaint-Melun-Malvoisine et Lieusaint-Malvoisine-monthléry



Dans le triangle ABC, les longueurs des côtés et les angles au sommet vérifient la relation:

$$\text{Loi des sinus } \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

avec $\sin(\hat{A})$, $\sin(\hat{B})$, $\sin(\hat{C})$ non nuls.



- 1) Sur le document 5, tracer le triangle Melun, Lieusaint et Malvoisine puis placer les trois angles au sommet indiqués dans les données. Noter les \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} comme dans l'aide.
- 2) En écrivant la loi des sinus (voir aide) appliquée au triangle représenté dans la question précédente, déterminer la distance Melun-Malvoisine en mètres puis en kilomètres.
- 3) Aujourd'hui on sait que la distance entre ces deux villes est égale à $d = 17,9$ km, la méthode de l'époque est-elle correcte ?
- 4) En appliquant la méthode de triangulation, Jean-Baptiste Delambre a obtenu une longueur de 1 000 km pour l'arc méridien Dunkerque Barcelone. En déduire à partir des documents la longueur du méridien.
- 5) Retrouve-t-on la définition du mètre ?
- 6) A partir du méridien, estimer le rayon de la Terre.

LE SAVIEZ-VOUS ?

La **triangulation** est une des plus anciennes techniques humaines pour construire ou se repérer. Elle a servi dans la construction des pyramides ou la cartographie mondiale et elle permet actuellement l'utilisation du GPS, le calcul de sollicitation, la représentation 3D, dans les jeux, et même en politique ou psychologie.

Elle se base sur un constat en géométrie plane: si l'on modifie une grandeur d'un triangle (l'un des trois côtés ou l'un des trois angles), on modifiera aussi d'autres grandeurs du triangle. Ceci sous-entend que les grandeurs du triangle sont liées entre elles.